



TUGAS AKHIR - SM141501

**PENERAPAN METODE DURBIN-CRUMP UNTUK
MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION
DENGAN DIVIDEN**

AYU RISANTI YUNIAR
NRP 1213 100 038

Dosen Pembimbing:
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



FINAL PROJECT - SM141501

**APPLICATION OF DURBIN-CRUMP METHOD
TO CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH
DIVIDEND**

AYU RISANTI YUNIAR
NRP 1213 100 038

Supervisor:
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN
PENERAPAN METODE DURBIN-CRUMP
UNTUK MENGHITUNG AMERICAN PUT
OPTION DENGAN DIVIDEN
APPLICATION OF DURBIN-CRUMP METHOD TO
CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH
DIVIDEND

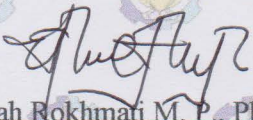
TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

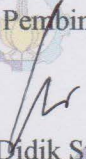
Oleh:
AYU RISANTI YUNIAR
NRP. 1213100038

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Endah Rokhmahati M. P., Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Dosen Pembimbing I,


Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si
NIP. 19600527 198701 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FMIPA ITS


Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Agustus 2017

PENERAPAN METODE *DURBIN-CRUMP* UNTUK MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION DENGAN DIVIDEN

Nama Mahasiswa : AYU RISANTI YUNIAR
NRP : 1213 100 038
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

Abstrak

Metode Durbin-Crump merupakan metode invers numerik transformasi Laplace yang dapat digunakan untuk melakukan perhitungan American put option dengan dividen melalui persamaan harga exercise optimal yang berada dalam ruang Laplace. Uji coba metode Durbin-Crump pada fungsi sederhana merupakan tahapan yang harus dilalui untuk mengetahui akurasi metode serta mendapatkan parameter yang selanjutnya digunakan dalam perhitungan American put option. Pada penelitian ini dibahas mengenai penerapan metode invers numerik transformasi Laplace, yaitu metode Durbin-Crump untuk menghitung American put option dengan dividen melalui persamaan harga exercise optimal yang berada dalam ruang Laplace. Adapun output yang diperoleh ialah performansi metode Durbin-Crump pada perhitungan American put option dengan dividen.

Kata-kunci:

Durbin-Crump, American put option, dividen.

APPLICATION OF DURBIN-CRUMP METHOD TO CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH DIVIDEND

Name : AYU RISANTI YUNIAR
NRP : 1213 100 038
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

Abstract

The Durbin-Crump is a numerical inversion of Laplace transform method which can be used to calculate American put option with dividend through the optimum exercise price equation in Laplace space. The test of the Durbin-Crump method of simple functions is a step that must be passed to know the accuracy of the method and obtain parameter which used in the calculation of American put option. In this research will be discussed about the application of numerical inversion of Laplace transform method, that is Durbin-Crump to calculate American put option with dividend through the optimal exercise price equation which is in Laplace space. The output obtained is the performance of the Durbin-Crump method on the calculation of American put option with dividend.

Keywords: *Durbin-Crump, American put option, dividend.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul

PENERAPAN METODE *DURBIN-CRUMP* UNTUK MENGHITUNG *AMERICAN PUT* *OPTION* DENGAN DIVIDEN

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS).

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Ketua Departemen Matematika ITS.
2. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si dan Ibu Endah Rokhmah M.P., Ph.D selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Sri Suprpti H., M.Si dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan semua saran demi perbaikan tugas akhir ini.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator tugas akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.

5. Bapak Lukman Hanafi selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Bapak dan Ibu penulis yang selalu mendoakan, menguatkan, dan mendukung penulis sehingga penulis bisa sampai saat ini.
8. Teman-teman yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan.
9. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terimakasih telah mendoakan dan mendukung penulis sampai dengan selesainya program ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Metode <i>Durbin-Crump</i>	6
2.3 <i>Opsi</i>	6
2.3.1 Istilah-istilah dalam Opsi	6
2.3.2 Tipe Opsi	7

	Hal
2.3.3 Mekanisme Opsi	8
2.3.4 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi	9
2.4 Dividen	10
2.5 Persamaan Harga <i>Exercise</i> Optimal	10
BAB III METODE PENELITIAN	15
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Kajian Metode <i>Durbin-Crump</i>	19
4.2 Uji Coba Metode <i>Durbin-Crump</i> pada Fungsi Sederhana	33
4.3 Perhitungan Harga <i>Exercise</i> Optimal	44
4.4 Performansi Metode <i>Durbin-Crump</i> dalam Perhitungan Harga <i>Exercise</i> Optimal <i>American Put Option</i>	46
BAB V PENUTUP	49
5.1 Kesimpulan	49
5.2 Saran	49
DAFTAR PUSTAKA	51

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian	17
Gambar 4.1 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 10 : 10 : 100$	36
Gambar 4.2 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$	37
Gambar 4.3 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$	37
Gambar 4.4 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 10 : 10 : 100$	38
Gambar 4.5 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$	38
Gambar 4.6 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$	39
Gambar 4.7 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 10 : 10 : 100$	39
Gambar 4.8 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$	40
Gambar 4.9 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$	40
Gambar 4.10 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 10 : 10 : 100$	41
Gambar 4.11 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$	41

Gambar 4.12 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$	42
Gambar 4.13 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 10 : 10 : 100$	42
Gambar 4.14 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$	43
Gambar 4.15 Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$	43

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1 Nilai S_f dengan Dividen	44
Tabel 4.2 Perbandingan Nilai harga <i>exercise</i> optimal <i>American Put Option</i> dengan $Do = 0$	46
Tabel 4.3 Perbandingan Performansi metode <i>Durbin-Crump</i> dengan metode <i>Gaver</i> <i>Stehfest</i> dalam Perhitungan harga <i>exercise</i> optimal <i>American Put Option</i> dengan $Do = 0$	47

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN A Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi $f(t) = 1$	53
LAMPIRAN B Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi $f(t) = e^{at}$	55
LAMPIRAN C Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi $f(t) = t^n$	57
LAMPIRAN D Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi $f(t) = \sin(at)$	59
LAMPIRAN E Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi $f(t) = \cos(at)$	61
LAMPIRAN F Listing Program MATLAB Metode Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = 1$	63
LAMPIRAN G Listing Program MATLAB Metode Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = e^{at}$	65
LAMPIRAN H Listing Program MATLAB Metode Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = t^n$	67
LAMPIRAN I Listing Program MATLAB Metode Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = \sin(at)$	69
LAMPIRAN J Listing Program MATLAB Metode Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = \cos(at)$	71
LAMPIRAN K Listing Program MATLAB Perhitungan American Put Option dengan Dividen Menggunakan Metode Durbin-crump . .	73

LAMPIRAN L Listing Program MATLAB Perhitungan American Put Option Tanpa Dividen Menggunakan Metode Durbin-crump . .	75
LAMPIRAN H Biodata Penulis	77

Daftar Simbol

\mathcal{L}^{-1}	Operator invers tranformasi Laplace
$f(t)$	Fungsi dalam domain waktu
$F(s)$	Fungsi dalam domain Laplace
N	Parameter metode <i>Durbin-Crump</i>
τ	Waktu menuju habisnya kontrak
Do	Nilai dividen
r	Tingkat suku bunga
σ	Volatilitas <i>underlying asset</i>
X	<i>Strike price</i>
T	Waktu berlakunya kontrak
$\bar{S}_f(p)$	Harga <i>exercise</i> optimal dalam ruang Laplace
$S_f(\tau)$	Harga <i>exercise</i> optimal dalam domain waktu

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas hal-hal yang menjadi latar belakang permasalahan. Kemudian permasalahan tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan batasan masalah untuk memperoleh tujuan serta manfaat.

1.1 Latar Belakang

Suatu teknik untuk menyelesaikan permasalahan dengan melakukan transformasi dari suatu domain pengamatan ke domain pengamatan yang lain merupakan pengertian dari transformasi Laplace. Suatu transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ dinotasikan dengan $F(s)$. Fungsi $f(t)$ yang berada pada domain waktu akan ditransformasi ke dalam ruang Laplace yaitu $F(s)$. Kebalikan dari transformasi Laplace disebut dengan invers transformasi Laplace dan disimbolkan dengan \mathcal{L}^{-1} . Hal ini berarti bahwa fungsi $f(t)$ merupakan suatu invers transformasi Laplace dari $F(s)$.

Invers dari suatu transformasi Laplace sulit untuk diperoleh melalui perhitungan secara analitik, oleh sebab itu diperlukan suatu metode pendekatan numerik untuk mendapatkan penyelesaian dari invers transformasi Laplace [1]. Beberapa metode pendekatan numerik untuk mendapatkan invers transformasi Laplace telah banyak diteliti, diantaranya metode *Stehfest*, *Papoulis*, *Weeks*, *Piessens Gaussian Quadrature*, dan *Durbin-Crump* [2]. Salah satunya yang dibahas pada tugas akhir ini yaitu metode *Durbin-Crump*. Metode pendekatan numerik untuk mendapatkan invers transformasi Laplace dapat diterapkan

dalam menyelesaikan permasalahan di bidang *finance* atau keuangan. Investasi merupakan suatu istilah yang berhubungan dengan keuangan. Investasi berkaitan dengan akumulasi suatu bentuk aset dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa yang akan datang. Salah satu aset yang dapat digunakan untuk melakukan suatu investasi adalah saham. Saham beserta surat berharga lainnya diperjual belikan di Bursa Efek Indonesia (BEI). Di antara berbagai jenis surat berharga tersebut, terdapat salah satu produk turunan saham atau biasa disebut produk derivatif, yaitu opsi (*option*) [3].

Opsi merupakan suatu kontrak pemberian hak untuk membeli atau menjual suatu aset dengan harga dan pada waktu tertentu. Hak pembeli opsi saham dapat berupa hak membeli suatu aset yang selanjutnya disebut dengan opsi beli (*call option*). Sedangkan hak untuk menjual aset pemegang opsi saham dengan harga yang telah disepakati disebut opsi jual (*put option*). Penulis opsi (*option writer*) memberikan hak tersebut sebagai ganti dari pembayaran sejumlah uang yang diterimanya yang disebut premi opsi. Harga yang mendasari dijual atau dibelinya suatu opsi disebut dengan harga pelaksanaan (*exercise price/strike price*).

Salah satu faktor yang dapat mempengaruhi harga opsi adalah dividen. Dividen merupakan pembagian laba atau keuntungan kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki. Adanya dividen mengakibatkan harga saham akan turun. Penurunan harga saham menyebabkan nilai *call option* menurun, sebaliknya nilai *put option* akan meningkat.

Berdasarkan waktu eksekusi kontrak, opsi dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu opsi Eropa (*European option*) dan opsi Amerika (*American option*). Opsi tipe Amerika bersifat lebih fleksibel karena eksekusi dapat

dilakukan kapanpun selama kontrak berlaku. Sedangkan pada European option eksekusi hanya dapat dilakukan pada saat jatuh tempo [4].

Nilai opsi dapat diperoleh dengan melakukan perhitungan melalui persamaan harga *exercise* optimal yang berada dalam ruang Laplace. Nilai opsi yang diperoleh dari persamaan tersebut berada dalam ruang Laplace, sehingga diperlukan suatu metode pendekatan invers numerik untuk mengembalikan nilai yang didapat ke dalam domain waktu [5].

Pada Tugas Akhir ini, dibahas mengenai penerapan salah satu metode pendekatan numerik invers transformasi Laplace, yaitu metode *Durbin-Crump* untuk mendapatkan nilai *American put option* dengan dividen melalui persamaan harga *exercise* optimal yang berada dalam ruang Laplace.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, disusun suatu rumusan masalah yang akan dibahas yaitu bagaimana performansi pendekatan numerik invers transformasi Laplace metode *Durbin-Crump* pada perhitungan *American put option* dengan dividen.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan antara lain:

1. Nilai *American put option* menggunakan dividen.
2. *Underlying asset* yang diperjualbelikan adalah saham.
3. Volatilitas harga saham konstan.
4. Suku bunga bank bebas resiko (*risk free interest rate*) konstan sepanjang waktu *option*.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini yaitu mendapatkan performansi pendekatan numerik invers transformasi Laplace metode *Durbin-Crump* pada perhitungan *American put option* dengan dividen.

1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diperoleh ialah mengetahui performansi pendekatan numerik invers transformasi Laplace metode *Durbin-Crump* pada perhitungan *American put option* dengan dividen, sehingga dapat digunakan sebagai dasar acuan bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai landasan teori dan materi penunjang yang terkait dengan permasalahan.

2.1 Penelitian Terdahulu

Jin Zhang [5] dalam penelitiannya mengenai perhitungan *American option*, membandingkan beberapa metode pendekatan numerik, diantaranya metode *Stehfest*, metode *Papoulis Legendre*, dan metode kombinasi linier. Dalam penelitiannya disimpulkan bahwa diantara ketiga metode tersebut, metode *Stehfest* lebih disarankan untuk digunakan dinilai dari segi efisiensi komputasi dan kemudahan dalam pengaplikasiannya. Sedangkan, metode kombinasi linier dianggap sebagai metode yang baik dari segi akurasi.

Brian Davies dan Brian Martin [1] dalam penelitiannya mengenai metode invers numerik transformasi Laplace membandingkan beberapa metode yang berdasarkan pada kuadrat Gaussian, transformasi bilinear, dan deret Fourier. Berdasarkan hasil penelitiannya, metode *Crump* sebagai salah satu metode yang berdasarkan pada deret Fourier dinilai memiliki tingkat akurasi yang tinggi.

Li Wei Chiang [6] dalam penelitiannya membandingkan delapan metode yang diuji akurasi dan efisiensinya dalam permasalahan aliran air tanah. Kedelapan metode tersebut yaitu metode *Stehfest*, *Schapery*, *Widder*, *Dubner* dan *Abate*, *Koizumi*, *Crump*, *Weeks*, dan *Talbot*. Penelitiannya menunjukkan bahwa metode *Crump* memberikan komputasi yang paling efisien dibandingkan metode yang lain.

2.2 Metode *Durbin-Crump*

Metode *Durbin-Crump* melakukan pendekatan dari invers transformasi Laplace dengan menuliskan deret tak hingga yang dikonstruksi menjadi deret tak hingga fungsi periodik genap dan fungsi periodik ganjil. Metode invers numerik transformasi Laplace *Durbin-Crump* diberikan sebagai berikut [7]:

$$f_N(t) \approx \frac{e^{vt}}{T} \left[-\frac{1}{2} \text{Re} \{F(v)\} + \sum_{k=0}^N \left(\text{Re} \left\{ F \left(v + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t - \text{Im} \left\{ F \left(v + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right) \right]$$

Metode *Durbin-Crump* mendekati fungsi waktu $f_N(t)$ dengan fungsi periodik dengan periode T . Variabel Laplace pada metode ini adalah v dan $v + \frac{ik\pi}{T}$ dengan $v = \alpha - \frac{\ln E}{2T}$. Simbol E adalah toleransi error dengan nilai $E = 1 \times 10^{-8}$. Sedangkan α merupakan pole dari fungsi $F(s)$. Apabila fungsi tidak memiliki pole, maka nilai $\alpha = 0$ [2].

2.3 Opsi

Opsi merupakan suatu kontrak antara *holder* (pembeli) dan *writer* (penjual) yang memberikan hak (tanpa adanya kewajiban) untuk membeli atau menjual suatu aset dengan harga tertentu (*strike price/exercise price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date*) sesuai dengan kesepakatan antara kedua pihak [4].

2.3.1 Istilah-istilah dalam Opsi

Beberapa istilah yang sering digunakan dalam opsi adalah sebagai berikut [8]:

1. *Premi*

Premi merupakan harga yang dibayar di awal kontrak oleh pembeli (*holder*) kepada penjual (*writer*) opsi.

2. *Underlying asset*

Underlying asset adalah aset mendasar yang diperjualbelikan dalam suatu kontrak opsi. Aset tersebut dapat berupa saham, obligasi, komoditi, dll.

3. *Strike price*

Strike price adalah harga pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk *underlying asset* jika opsi di*exercise*. Untuk *call option*, *strike price* berarti harga yang harus dibayar (dibeli) pemilik *call option* pada saat jatuh tempo. Sedangkan bagi pemegang *put option*, *strike price* merupakan harga yang akan diterima oleh pemilik *put option* dari penjual *put option*.

4. *Expiration date/maturity date*

Expiration date/maturity date adalah waktu jatuh tempo atau tanggal pada kontrak opsi dimana dapat dilaksanakan transaksi (*exercise*). Setelah melewati *expiration date*, opsi dinyatakan kadaluarsa atau tidak dapat di*exercise*.

5. *Intrinsic value*

Intrinsic value ialah suatu nilai nyata dari premi sebuah opsi yang merupakan selisih antara *strike price* dan harga *underlying asset*.

6. *Time value* *Time value* merupakan jumlah dimana harga opsi melebihi nilai intrinsiknya.

2.3.2 Tipe Opsi

Berdasarkan periode waktu eksekusi sebuah opsi maka dapat dibagi menjadi beberapa jenis, antara lain:

1. *European Option*

Kontrak opsi tipe Eropa memberikan hak untuk melakukan eksekusi yang hanya dapat dilaksanakan

pada saat tanggal jatuh tempo masa berlakunya opsi tersebut.

2. *American Option*

Kontrak opsi tipe Amerika memberikan hak untuk melakukan eksekusi kapan saja selama kontrak masih berlangsung.

3. *Bermudan Option*

Kontrak option yang dapat dilaksanakan pada saat tanggal jatuh tempo ataupun sebelum jatuh tempo. Merupakan kombinasi dari opsi Eropa dan Amerika.

4. *Barrier Option*

Option yang mensyaratkan keharusan dicapainya suatu harga tertentu pada *underlying asset* sebelum eksekusi opsi dapat dilakukan.

2.3.3 Mekanisme Opsi

Berdasarkan bentuk hak yang terjadi terdapat dua jenis opsi antara lain [4]:

1. *Call option*

Call option adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk membeli suatu aset dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *call option* yaitu *call option buyer/long call* dan *call option seller/short call*.

2. *Put option*

Put option adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual suatu aset dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *put option* yaitu *put option buyer/long put* dan *put option seller/short put*.

2.3.4 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi

Harga dari sebuah opsi dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, diantaranya sebagai berikut [4]:

1. Harga *underlying asset*

Harga suatu *call option* akan semakin tinggi apabila harga *underlying asset*-nya juga semakin tinggi. Sebaliknya, apabila harga *put option* semakin tinggi maka harga *underlying asset* semakin rendah.

2. *Moneyness*

Moneyness ialah perbedaan antara harga *underlying asset* saat ini dengan *strike price*. Suatu *put option* dan *call option* akan memiliki nilai apabila berada pada kondisi *in the money*. *In the money* merupakan kondisi dimana *strike price* lebih tinggi daripada *underlying asset*.

3. Jangka waktu jatuh tempo

Semakin panjang jangka waktu jatuh tempo (*time to expire*) maka semakin tinggi harga *call option*, sedangkan harga *put option* semakin rendah.

4. Volatilitas

Volatilitas dari suatu *underlying asset* adalah ukuran tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying asset* tersebut di masa datang. Apabila volatilitas semakin meningkat maka peluang *underlying asset* untuk mengalami peningkatan atau penurunan juga semakin besar.

5. Tingkat suku bunga (*interest rate*)

Peningkatan suku bunga akan mengakibatkan harga *call option* turun dan harga *put option* naik.

6. Dividen

Bila dalam masa berlakunya opsi perusahaan membagikan dividen, maka hal ini mengakibatkan harga saham akan turun. Penurunan harga saham menyebabkan harga *call option* menurun, sebaliknya harga *put option* akan meningkat.

2.4 Dividen

Dividen adalah pembagian laba kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki [6]. Pembagian ini akan mengurangi laba ditahan dan kas yang tersedia bagi perusahaan, tapi distribusi keuntungan kepada para pemilik saham memang tujuan utama suatu bisnis. Terdapat 4 jenis dividen, yaitu:

1. Dividen Tunai

Dividen yang dibagikan dalam bentuk tunai dan dikenakan pajak pada tahun pengeluarannya.

2. Dividen Saham

Dividen yang dibagikan dalam bentuk saham tambahan yang dihitung berdasarkan proporsi terhadap jumlah saham yang dimiliki.

3. Dividen Properti

Dividen yang dibagikan dalam bentuk aset.

4. Dividen Interim

Dividen yang dibagikan sebelum tahun buku perseroan berakhir.

2.5 Persamaan Harga *Exercise Optimal*

Diberikan sistem persamaan diferensial pada penurunan persamaan harga *exercise optimal American put option* yang

telah dilakukan pada penelitian Jin Zhang [5] sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} S^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dS^2} + (\gamma - D) S \frac{d\bar{U}}{dS} - (\gamma + p) \bar{U} = \frac{\gamma - DS}{p}, \\ \bar{U}(p\bar{S}_f, p) = 0, \\ \frac{d\bar{U}}{dS}(p\bar{S}_f, p) = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dS^2} + (\gamma - D) S \frac{d\bar{U}}{dS} - (\gamma + p) \bar{U} = 0, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} \bar{U}(S, p) = 0, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial *Euler* yang akar-akarnya dapat diperoleh sebagai berikut:

substitusi $S = e^t$, sehingga:

$$\begin{aligned} \ln S &= t \\ \frac{1}{S} &= \frac{dt}{dS} \end{aligned} \quad (2.3)$$

sehingga, turunan pertama \bar{U} terhadap S adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dS} &= \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{dt}{dS} \\ &= \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{1}{S} \end{aligned} \quad (2.4)$$

sedangkan turunan kedua \bar{U} terhadap S adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{U}}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d\bar{U}}{dS} \right) \\ &= \frac{d}{dS} \left(\frac{d\bar{U}}{dt} \frac{1}{S} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d\left(\frac{d\bar{U}}{dt}\right)}{dt} \frac{dt}{dS} \frac{1}{S} \\
&= \frac{d^2\bar{U}}{dt^2} \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S^2} \frac{d\bar{U}}{dt} \\
&= \frac{1}{S^2} \left(\frac{d^2\bar{U}}{dt^2} - \frac{d\bar{U}}{dt} \right) \\
S^2 \frac{d^2\bar{U}}{dS^2} &= \frac{d^2\bar{U}}{dt^2} - \frac{d\bar{U}}{dt} \tag{2.5}
\end{aligned}$$

misalkan operator $\frac{d\bar{U}}{dt} = \mathcal{D}$, maka berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5) diperoleh:

$$\begin{aligned}
(\gamma - D)S\bar{U}' &= (\gamma - D)\mathcal{D}\bar{U} \\
S^2\bar{U}'' &= \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)\bar{U}
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (2.2) menjadi PD linier dengan koefisien konstan berikut:

$$[\mathcal{D}^2 + (\gamma - D - 1)\mathcal{D} - (\gamma + p)]\bar{U} = 0$$

dengan melakukan substitusi $\bar{U} = e^{qt}$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut:

$$q^2 + (\gamma - D - 1)q - (\gamma + p) = 0$$

$q_{1,2}$ merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik yang telah diperoleh tersebut, yaitu:

$$q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + (p + \gamma)}$$

dengan

$$b = \frac{1 + D - \gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad D = \frac{2D_0}{\sigma^2}$$

Sehingga diperoleh persamaan harga *exercise* optimal yang berada dalam ruang Laplace untuk menghitung nilai *American put option* dengan dividen diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p + (D - \gamma)q_2}{q_2(p + \gamma)(p + D)} + \bar{S}_f(p)D \frac{1 - q_2}{p^{q_1} q_2(p + D)} \\ = -\frac{\gamma}{p^{1+q_1}(p + \gamma)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan:

\bar{S}_f = harga *exercise* optimal

D_0 = nilai dividen

r = tingkat suku bunga

σ = volatilitas dari *underlying asset*

p = variabel Laplace

BAB III

METODE PENELITIAN

Objek dalam penelitian yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah metode *Durbin-Crump* yang digunakan untuk mendapatkan nilai *American put option* dengan dividen. Adapun angkah-langkah sistematis yang akan dilakukan ditunjukkan seperti berikut:

1. Studi literatur
Pada tahap ini dilakukan pengumpulan teori pendukung mengenai metode *Durbin-Crump*, *American put option*, dan dividen.
2. Pengkajian metode *Durbin-Crump*
Pada tahap ini dilakukan pengkajian metode *Durbin-Crump* yang akan digunakan untuk mendapatkan nilai *American put option*.
3. Uji coba fungsi sederhana
Pada tahap ini dilakukan aplikasi metode *Durbin-Crump* pada beberapa fungsi sederhana untuk mengetahui tingkat akurasi metode. Selain itu, uji coba fungsi sederhana bertujuan untuk mendapatkan parameter metode dengan nilai error terkecil.
4. Aplikasi persamaan harga *exercise* optimal pada metode *Durbin-Crump*
Dalam tahapan ini dilakukan simulasi dari aplikasi persamaan harga *exercise* optimal pada metode *Durbin-Crump* untuk mendapatkan nilai dari *American put*

option dengan dividen. Adapun software yang digunakan untuk simulasi adalah MATLAB.

5. Analisis performansi metode *Durbin-Crump*

Pada tahap ini dilakukan analisa performansi dari metode *Durbin-Crump* dalam mendapatkan nilai *American put option* dengan dividen.

6. Penarikan kesimpulan dan penyusunan laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan. Kemudian dilakukan penyusunan laporan sesuai dengan sistematika penulisan.



Gambar 3.1: Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai kajian metode invers numerik transformasi Laplace, yaitu metode *Durbin-Crump*. Kemudian dilakukan uji coba metode pada beberapa fungsi sederhana. Tahap ini bertujuan untuk mendapatkan parameter metode *Durbin-Crump* dengan nilai error terkecil yang kemudian parameter tersebut digunakan untuk menghitung nilai *American put option* dengan dividen.

4.1 Kajian Metode *Durbin-Crump*

Metode *Durbin-Crump* merupakan metode invers numerik transformasi Laplace yang menggunakan pendekatan Deret Fourier. Kajian mengenai metode *Durbin-Crump* dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi real dari t dengan $t \geq 0$, maka transformasi Laplace dan inversnya didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (4.2)$$

dari persamaan (4.1), substitusi $s = v + iw$ maka:

$$\begin{aligned} F(v + iw) &= \int_0^{\infty} e^{-(v+iw)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-vt} e^{-i(wt)} f(t) dt \end{aligned}$$

Berdasarkan rumus Euler, yaitu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ maka

$$\begin{aligned} F(v + iw) &= \int_0^\infty e^{-vt} (\cos(wt) - i \sin(wt)) f(t) dt \\ F(v + iw) &= \int_0^\infty e^{-vt} f(t) \cos(wt) dt \\ &\quad - i \int_0^\infty e^{-vt} f(t) \sin(wt) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Re}\{F(v + iw)\} = \int_0^\infty e^{-vt} f(t) \cos(wt) dt \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Im}\{F(v + iw)\} = - \int_0^\infty e^{-vt} f(t) \sin(wt) dt \quad (4.5)$$

Persamaan (4.4) merupakan bagian real dari $F(s)$ dan persamaan (4.5) merupakan bagian imajiner dari $F(s)$. Kemudian substitusi persamaan (4.4) dan (4.5) pada persamaan (4.3) sehingga diperoleh:

$$F(v + iw) = \operatorname{Re}\{F(v + iw)\} + i \operatorname{Im}\{F(v + iw)\} \quad (4.6)$$

Dari persamaan (4.2), dimisalkan:

$$\begin{aligned} s &= v + iw \\ ds &= i dw \end{aligned}$$

batas integrasi berubah menjadi:

$$\begin{aligned} s &= v + i\infty \rightarrow w = \infty \\ s &= v - i\infty \rightarrow w = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(v+iw)t} F(v+iw) i dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{vt} e^{i(wt)} F(v+iw) i dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{vt} (\cos(wt) + i \sin(wt)) F(v+iw) dw \\
&= \frac{e^{vt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(wt) + i \sin(wt)) (Re\{F(v+iw)\} \\
&\quad + i Im\{F(v+iw)\}) dw
\end{aligned} \tag{4.7}$$

berdasarkan persamaan (4.6), maka persamaan (4.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{e^{vt}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (Re\{F(v+iw)\} \cos(wt) - Im\{F(v+iw)\} \right. \\
&\quad \left. \sin(wt)) dw + i \int_{-\infty}^{\infty} (Im\{F(v+iw)\} \cos(wt) \right. \\
&\quad \left. + Re\{F(v+iw)\} \sin(wt)) dw \right] \\
&= \frac{e^{vt}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (Re\{F(s)\} \cos(wt) - Im\{F(s)\} \sin(wt)) dw \right. \\
&\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} (Im\{F(s)\} \cos(wt) + Re\{F(s)\} \right. \\
&\quad \left. \sin(wt)) dw \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Bagian imajiner pada persamaan (4.8) dapat diabaikan,

sehingga dapat ditulis sebagai [9]:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{e^{vt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw \\
 &= \frac{e^{vt}}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw \\
 f(t) &= \frac{e^{vt}}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \left(2 \int_0^c (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw \right) \\
 &= \frac{e^{vt}}{2\pi} \left(2 \int_0^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw \right) \\
 f(t) &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi dari transformasi Laplace, maka untuk $t < 0$ berlaku sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(wt) - Im\{F(s)\}\sin(wt))dw &= 0 \\
 \int_0^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(-wt) - Im\{F(s)\}\sin(-wt))dw &= 0 \\
 \int_0^{\infty} (Re\{F(s)\}\cos(wt) + Im\{F(s)\}\sin(wt))dw &= 0 \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} Re\{F(s)\}\cos(wt)dw + \int_0^{\infty} Im\{F(s)\}\sin(wt)dw &= 0 \\
 \int_0^{\infty} Re\{F(s)\}\cos(wt)dw = - \int_0^{\infty} Im\{F(s)\}\sin(wt)dw &\quad (4.11)
 \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (4.11), substitusi $\int_0^{\infty} Im\{F(s)\}\sin(wt)dw$ dengan $-\int_0^{\infty} Re\{F(s)\}\cos(wt)dw$

pada persamaan (4.10) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty (Re\{F(s)\}cos(wt) - Im\{F(s)\}sin(wt))dw \\
 &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty (Re\{F(s)\}cos(wt) + Re\{F(s)\}cos(wt))dw \\
 &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty 2(Re\{F(s)\}cos(wt))dw \\
 &= \frac{2e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty Re\{F(s)\}cos(wt)dw \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

sebaliknya, berdasarkan persamaan (4.11), substitusi $\int_0^\infty Re\{F(s)\}cos(wt)dw$ dengan $-\int_0^\infty Im\{F(s)\}sin(wt)dw$ pada persamaan (4.10) akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty (Re\{F(s)\}cos(wt) - Im\{F(s)\}sin(wt))dw \\
 &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty (-Im\{F(s)\}sin(wt) - Im\{F(s)\}sin(wt))dw \\
 &= \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty -2(Im\{F(s)\}sin(wt))dw \\
 &= \frac{-2e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty Im\{F(s)\}sin(wt)dw \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh 3 bentuk invers transformasi Laplace yaitu pada persamaan (4.9), (4.12), dan (4.13) [9].

Misalkan $h(t)$ merupakan suatu fungsi real dari t , dengan $h(t) = 0$ untuk $t < 0$. Tinjau bagian dari $h(t)$ pada interval $(nT, (n+1)T)$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$, konstruksi suatu deret tak hingga dari fungsi periodik $g_n(t)$ dengan periode $2T$:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(2nT - t) & (n-1)T \leq t \leq nT \\ h(t) & nT \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \tag{4.14}$$

Dengan tujuan mendapatkan representasi deret Fourier pada masing-masing $g_n(t)$, persamaan (4.14) diubah bentuknya menjadi fungsi yang terdefinisi pada interval $(-T, T)$. Sehingga didapat:

$$n = 0, 2, 4, \dots g_n(t) = \begin{cases} h(nT - t) & -T \leq t \leq 0 \\ h(nT + t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.15)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T + t) & -T \leq t \leq 0 \\ h((n+1)T - t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.16)$$

Deret Cosinus Fourier yang merepresentasikan $g_n(t)$ adalah:

$$g_n(t) = \frac{a_n, 0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \quad (4.17)$$

dengan

$$a_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{a_n, 0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \right. \\ &\quad \left. \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right] \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right] \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \right] \end{aligned}$$

Lalu persamaan tersebut dijumlahkan dari $n = 0$ sampai tak hingga, sehingga didapat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} h(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} h(t) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) dt \right) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right]$$

substitusi $h(t) = e^{-vt} f(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) dt \right) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} A_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) &= \frac{2e^{vt}}{T} \left[\frac{1}{2} A_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \quad (4.19) \end{aligned}$$

dengan

$$A_{k=0} = \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) dt \quad (4.20)$$

$$A_k = \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) dt \quad (4.21)$$

Tinjau $h(t)$ pada interval $(nT, (n+1)T)$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$, konstruksi suatu deret tak hingga dari fungsi periodik $k_n(t)$ dengan periode $2T$:

$$k_n(t) = \begin{cases} -h(2nT - t) & (n-1)T \leq t \leq nT \\ h(t) & nT \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \quad (4.22)$$

Dengan tujuan mendapatkan representasi deret Fourier pada masing-masing $k_n(t)$, persamaan (4.22) diubah bentuknya menjadi fungsi yang terdefinisi pada interval $(-T, T)$. Sehingga didapat:

$$n = 0, 2, 4, \dots k_n(t) = \begin{cases} -h(nT - t) & -T \leq t \leq 0 \\ h(nT + t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.23)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots k_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T + t) & -T \leq t \leq 0 \\ -h((n+1)T - t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.24)$$

Deret Fourier yang merepresentasikan setiap fungsi ganjil $k_n(t)$ adalah:

$$k_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \quad (4.25)$$

dengan

$$b_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

Lalu persamaan tersebut dijumlahkan dari $n = 0$ sampai tak hingga, sehingga didapat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) = \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} h(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right)$$

substitusi $h(t) = e^{-vt}f(t)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) &= \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} h(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \right) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\
 &= \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \\
 \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) &= \frac{2e^{vt}}{T} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

dengan

$$B_k = \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) dt \tag{4.28}$$

dengan mengalikan persamaan (4.19) dan (4.27) dengan $\frac{1}{2}$ kemudian dijumlahkan, maka akan didapat:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) \\
 &= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{A_{k=0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \right] \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.29) mengandung error yang dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (4.15) dan (4.16) dari $n = 0$ sampai tak hingga kemudian dikali dengan e^{vt} di kedua sisi,

seperti ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT + t) + h((n+1)T - t)) \\
\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} (h(nT + t) + h((n+1)T - t)) \\
&= \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} e^{vt} h(nT + t) + \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} e^{vt} h((n+1)T - t) \\
&= e^{vt} [h(t) + h(2T + t) + h(4T + t) + \dots] \\
&\quad + e^{vt} [h(2T - t) + h(4T - t) + h(6T - t) + \dots] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} h(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{vt} h(2nT - t) \quad (4.30)
\end{aligned}$$

substitusi $h(t) = e^{-vt} f(t)$ pada persamaan (4.30)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} e^{-v(2nT+t)} f(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{vt} e^{-v(2nT-t)} \\
&\quad f(2nT - t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} e^{-vt} e^{-2nTv} f(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{vt} e^{vt} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT - t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nTv} f(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2vt} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT - t) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

masukkan untuk nilai $n = 0$ pada persamaan (4.31)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} f(2nT + t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2vt} e^{-2nTv} \\
 &\quad f(2nT - t) \\
 \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT + t) + e^{2vt} \\
 &\quad f(2nT - t)]
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

dengan $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT + t) + e^{2vt} f(2nT - t)]$ merupakan bagian dari error, maka persamaan (4.32) dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) = f(t) + ERROR1 \tag{4.33}$$

Dengan cara yang sama, dengan bagian error yang lain didapat dengan menjumlahkan persamaan (4.23) dan (4.24) dari $n = 0$ sampai tak hingga kemudian dikali dengan e^{vt} di kedua sisi, seperti ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT + t) - h((n+1)T - t)) \\
 \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} (h(nT + t) - h((n+1)T - t)) \\
 &= \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} e^{vt} h(nT + t) - \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} e^{vt} h((n+1)T - t)) \\
 &= e^{vt} [h(t) + h(2T + t) + h(4T + t) + \dots] \\
 &\quad - e^{vt} [h(2T - t) + h(4T - t) + h(6T - t) + \dots] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} h(2nT + t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{vt} h(2nT - t)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

substitusi $h(t) = e^{-vt}f(t)$ pada persamaan (4.34)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} e^{-v(2nT+t)} f(2nT+t) - \sum_{n=1}^{\infty} (e^{vt} e^{-v(2nT-t)} \\
&\quad f(2nT-t)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} e^{-vt} e^{-2nTv} f(2nT+t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{vt} (e^{vt} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT-t)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nTv} f(2nT+t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{2vt} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT-t) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

masukkan untuk nilai $n = 0$ pada persamaan (4.35)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} f(2nT+t) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{2vt} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT-t) \\
&= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT+t) - e^{2vt} f(2nT-t)] \\
\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) &= f(t) + ERROR2 \tag{4.36}
\end{aligned}$$

dengan $ERROR2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT+t) - e^{2vt} f(2nT-t)]$.

Kemudian persamaan (4.33) dan (4.36) dijumlahkan lalu dikali $\frac{1}{2}$ menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) \\
 = & f(t) + ERROR1 + f(t) + ERROR2 \\
 & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) \\
 = & f(t) + \frac{1}{2} ERROR1 + \frac{1}{2} ERROR2 \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.29), maka persamaan (4.37) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{A_{k=0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \right] \\
 = & f(t) + ERROR3 \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

$$\text{dengan } ERROR3 = \frac{1}{2} ERROR1 + \frac{1}{2} ERROR2$$

$$\begin{aligned}
 ERROR3 &= \frac{1}{2} ERROR1 + \frac{1}{2} ERROR2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT+t) + e^{2vt} f(2nT-t)] \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} [f(2nT+t) - e^{2vt} f(2nT-t)] \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} f(2nT+t)
 \end{aligned}$$

ruas kiri dari persamaan (4.38) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{A_{k=0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\
&= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) dt \right) \right. \\
&\quad \left. \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) dt \right) \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\
&= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Im} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right]
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (4.38) menjadi:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{A_{k=0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\
&\quad - \text{ERROR3} \\
f(t) &= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Im} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nTv} \\
&\quad f(2nT + t)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Deret tak hingga pada persamaan (4.39) tersebut hanya dapat dijumlahkan hingga jumlah N yang terbatas, sehingga

terdapat error pemotongan yang diberikan sebagai berikut [7]:

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T} \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) - \operatorname{Im} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right) \right]$$

dengan demikian didapatkan $f(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{vt}}{T} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ F(v) \} + \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \\ f(t) &= \frac{e^{vt}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ F(v) \} + \sum_{k=0}^N \operatorname{Re} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} \left\{ F \left(v + i \frac{k\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi}{T} t \right) \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.2 Uji Coba Metode *Durbin-Crump* pada Fungsi Sederhana

Idealnya, metode invers numerik yang baik memiliki tingkat ketergantungan yang sangat kecil terhadap parameter yang terkait dengan metode tersebut, sehingga variasi dari parameter tidak mempengaruhi hasil invers numerik. Namun, karena metode invers numerik transformasi Laplace bersifat tidak stabil, maka uji parameter untuk mengetahui sensitivitas metode terhadap nilai parameter yang berbeda perlu dilakukan [5].

Uji parameter dilakukan dengan mengaplikasikan metode *Durbin-Crump* pada beberapa fungsi sederhana yang akan diujicoba sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\
 e^{at} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} \\
 t^n &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} \\
 \sin(at) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s^2 + a^2} \right\} \\
 \cos(at) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Nilai invers transformasi Laplace beberapa fungsi sederhana tersebut dihitung pada beberapa titik waktu sekaligus untuk mengetahui keakuratan metode. Untuk melihat kesesuaian metode dengan permasalahan *option*, maka titik waktu yang diambil dibatasi pada nilai yang kecil. Pada metode *Durbin-Crump*, untuk menentukan parameter N yang sesuai, dipilih beberapa nilai N yang berbeda untuk diujicobakan pada fungsi sederhana yang telah dipilih.

Kisaran parameter yang akan digunakan pada kasus perhitungan harga *exercise optimal American put option* dipilih berdasarkan rata-rata error relatif terendah pada uji coba fungsi sederhana. Gambar 4.1 sampai Gambar 4.15 menunjukkan grafik rata-rata error relatif dengan beberapa nilai parameter yang dihitung pada masing-masing fungsi sederhana yang diuji. Rata-rata error relatif ditentukan sebagai berikut:

$$Rata - rata Error Relatif = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\bar{a}_i - a_i}{a_i} \right|}{n} \quad (4.41)$$

dengan:

\bar{a}_i = hasil invers numerik pada waktu ke- i

a_i = hasil analitik pada waktu ke- i

n = jumlah total titik waktu yang dihitung

Grafik rata-rata error relatif untuk fungsi $f(t) = 1$ ditunjukkan pada Gambar 4.1 sampai Gambar 4.3. Nilai rata-rata error relatif pada Gambar 4.1 bernilai semakin kecil seiring dengan bertambahnya nilai parameter N , yaitu pada rentang nilai 10 hingga 100. Hal tersebut juga berlaku untuk Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 dengan nilai parameter N berada pada rentang 100 hingga 1000000.

Sama halnya pada fungsi $f(t) = e^{at}$. Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 menunjukkan bahwa pada rentang parameter $N = 10$ hingga $N = 10000$ nilai rata-rata error relatif semakin kecil. Sedangkan pada Gambar 4.6 nilai rata-rata error relatif juga bernilai semakin kecil pada rentang parameter $N = 100000$ hingga $N = 1000000$.

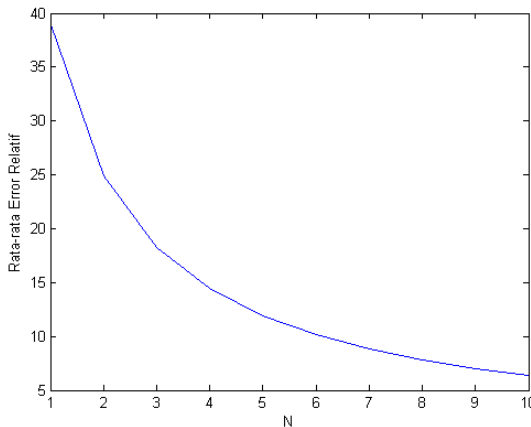
Kemudian, untuk fungsi $f(t) = t^n$ pada Gambar 4.7 menunjukkan bahwa saat rentang parameter $N = 10$ hingga $N = 100$ nilai rata-rata error relatif semakin kecil. Sedangkan pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9 juga demikian, nilai rata-rata error relatif bernilai semakin kecil pada saat rentang parameter $N = 1000$ hingga $N = 1000000$.

Berikutnya, pada fungsi $f(t) = \sin(at)$, Gambar 4.10 dan Gambar 4.11 menunjukkan bahwa nilai rata-rata error relatif pada saat nilai parameter $N = 10$ hingga $N = 10000$ semakin kecil. Sedangkan pada Gambar 4.12 nilai rata-rata error relatif semakin kecil hingga pada nilai $N = 200000$, kemudian

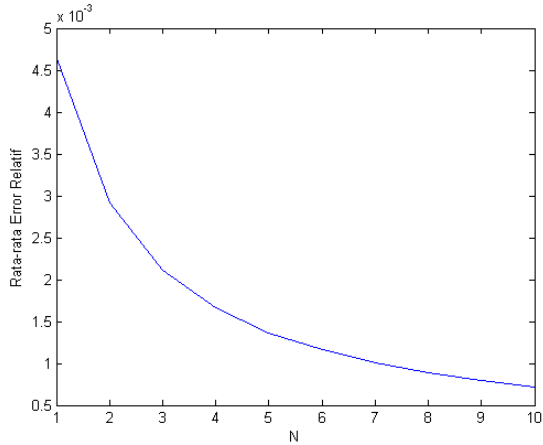
meningkat kembali hingga N bernilai 1000000.

Sedangkan, untuk fungsi $f(t) = \cos(at)$, pada Gambar 4.13 dan Gambar 4.14 menunjukkan bahwa pada rentang parameter $N = 10$ hingga $N = 10000$ nilai rata-rata error relatif semakin kecil. Hal tersebut juga berlaku pada Gambar 4.15 yang menunjukkan nilai rata-rata error relatif yang bernilai semakin kecil hingga nilai $N = 1000000$.

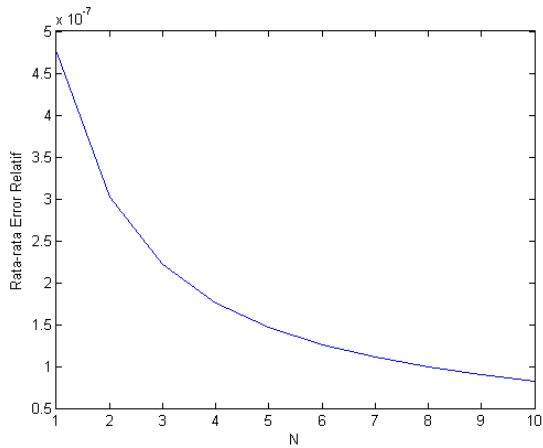
Dari hasil uji coba kelima fungsi sederhana tersebut, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai parameter N , maka rata-rata error relatif semakin kecil. Namun, pada fungsi $f(t) = \sin(at)$ rata-rata error relatif semakin kecil hingga nilai N mencapai 200000, kemudian kembali meningkat. Sehingga, pada kasus perhitungan harga *exercise optimal American put option* dipilih nilai parameter $N = 200000$.



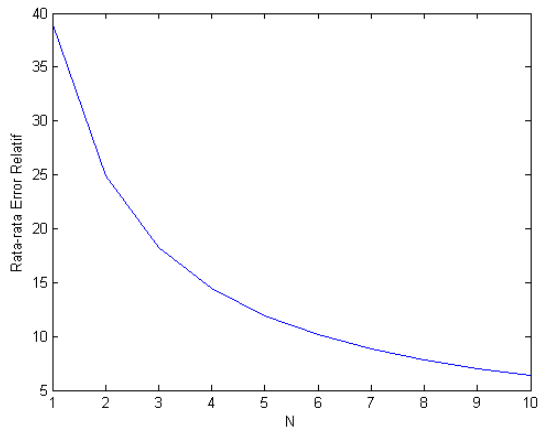
Gambar 4.1: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 10 : 10 : 100$



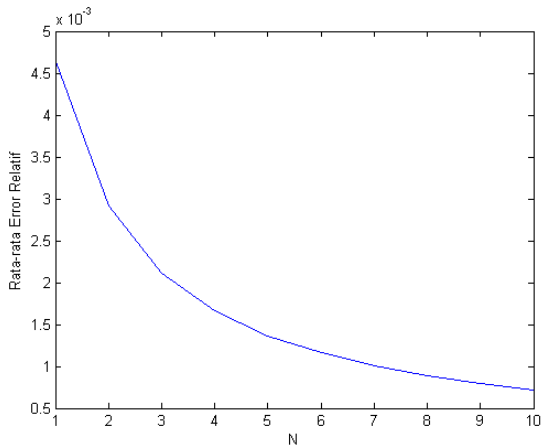
Gambar 4.2: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$



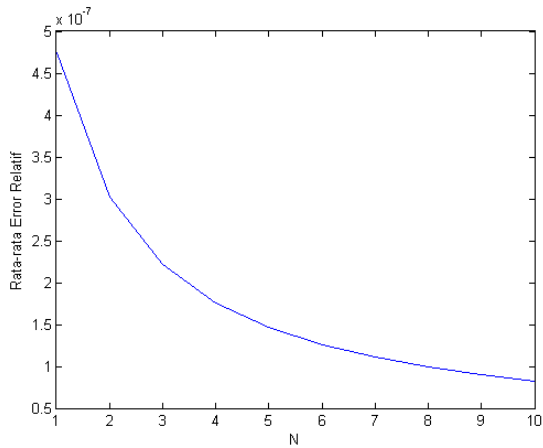
Gambar 4.3: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = 1$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$



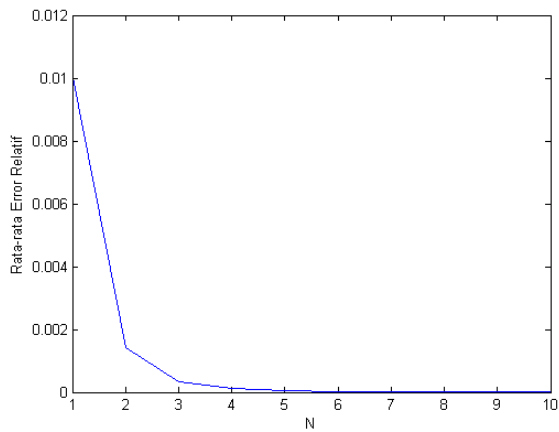
Gambar 4.4: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 10 : 10 : 100$



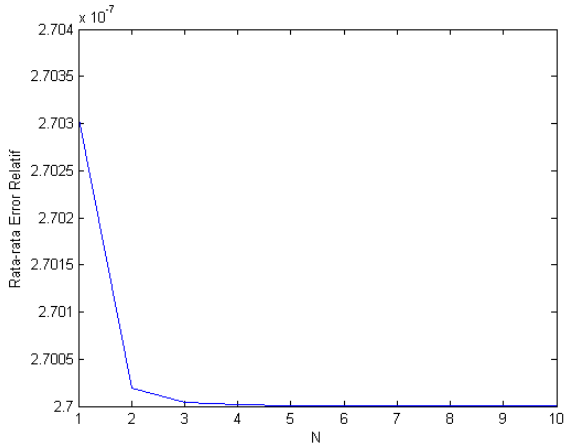
Gambar 4.5: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$



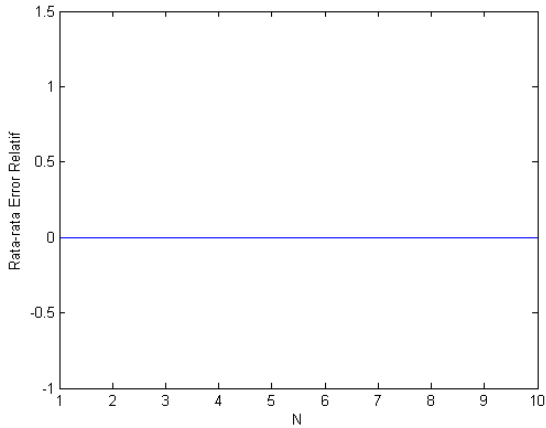
Gambar 4.6: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = e^{at}$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$



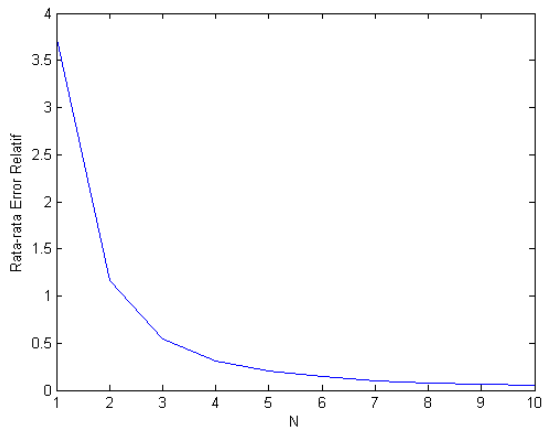
Gambar 4.7: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 10 : 10 : 100$



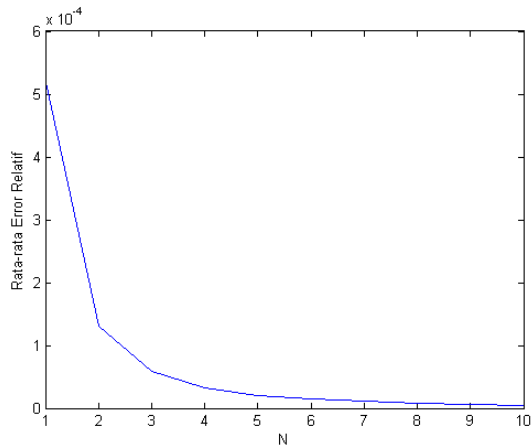
Gambar 4.8: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$



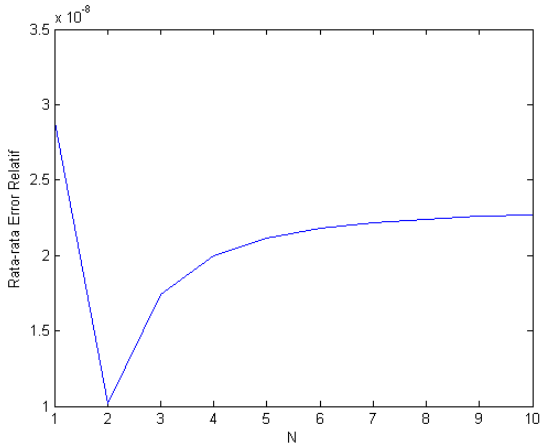
Gambar 4.9: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = t^n$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$



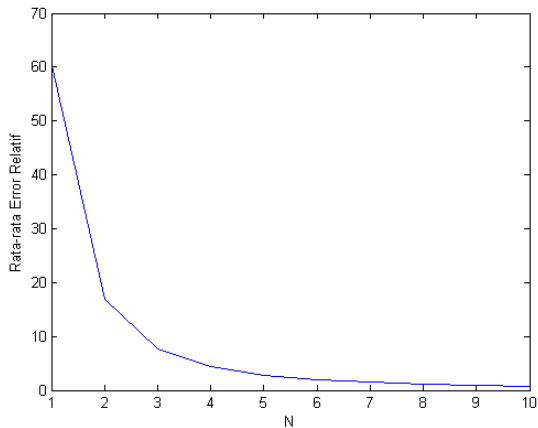
Gambar 4.10: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 10 : 10 : 100$



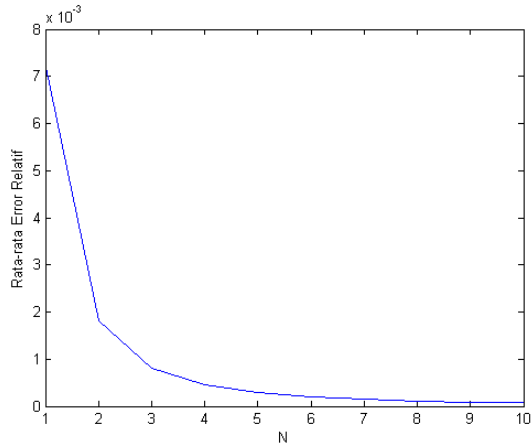
Gambar 4.11: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$



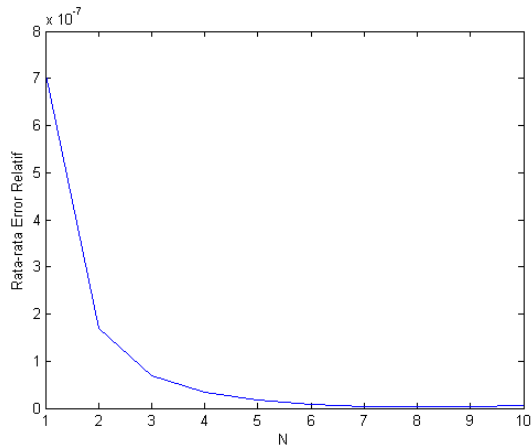
Gambar 4.12: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \sin(at)$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$



Gambar 4.13: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 10 : 10 : 100$



Gambar 4.14: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 1000 : 1000 : 10000$



Gambar 4.15: Rata-rata Error Relatif Fungsi $f(t) = \cos(at)$ dengan $N = 100000 : 100000 : 1000000$

4.3 Perhitungan Harga *Exercise* Optimal

Harga *exercise* optimal *American put option* diperoleh dengan melakukan invers persamaan harga *exercise* optimal yang berada dalam ruang Laplace, yaitu Persamaan 2.1. Dengan memasukkan nilai tingkat suku bunga (r) = 5%, dividen (D_0) = 5%, volatilitas (σ) sebesar 30%, *strike price* (X) = \$100, jangka waktu berlakunya opsi 1 tahun, dan p variabel Laplace dari metode *Durbin-Crump*, yaitu v dan $v + \frac{ik\pi}{T}$, maka nilai dari S_f dapat diperoleh dengan cara mendapatkan akar dari Persamaan 2.1. Perhitungan dilakukan dengan menggunakan software MATLAB.

Karena terdapat dua variabel Laplace dari metode *Durbin-Crump*, maka persamaan harga *exercise* optimal juga menghasilkan dua nilai akar. Nilai akar yang pertama dapat diperoleh dengan mudah dengan memasukkan v sebagai variabel Laplace. Namun, untuk variabel Laplace $v + \frac{ik\pi}{T}$ sulit untuk dihitung nilai akarnya karena persamaan mengandung bilangan imajiner. Untuk menghilangkan angka imajiner yang muncul, dipilih nilai $k = 0$. Akan tetapi, untuk nilai $k = 0$ hasil perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* menggunakan metode *Durbin-Crump* menunjukkan hasil yang kurang akurat jika dibandingkan dengan perhitungan menggunakan metode *Gaver Stehfest* pada penelitian Jin Zhang [5] yang ditunjukkan pada Tabel 4.1. Alasan penulis menggunakan penelitian Jin Zhang sebagai pembanding karena metode *Gaver Stehfest* telah berhasil diterapkan dalam perhitungan *American put option* dengan dividen.

Tabel 4.1: Nilai S_f dengan Dividen

τ	$S_f(\tau)$ <i>Durbin-Crump</i>	$S_f(\tau)$ <i>Gaver Stehfest</i>
0.006116	466.2509	0.7031

Dari permasalahan tersebut, dilakukan penyederhanaan persamaan harga *exercise* optimal dengan memasukkan nilai $Do = 0$. Berikut proses penyederhanaan persamaan harga *exercise* optimal:

$$\bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p + (D - \gamma)q_2}{q_2(p + \gamma)(p + D)} + \bar{S}_f(p)D \frac{1 - q_2}{p^{q_1}q_2(p + D)} = -\frac{\gamma}{p^{1+q_1}(p + \gamma)}$$

untuk $Do = 0$ maka

$$\begin{aligned} \bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p - \gamma q_2}{q_2(p + \gamma)p} &= -\frac{\gamma}{p^{1+q_1}(p + \gamma)} \\ \bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p - \gamma q_2}{q_2(p^2 + \gamma p)} &= -\frac{\gamma}{p^{q_1}(p^2 + \gamma p)} \\ \bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma(1 - q_2) + p}{q_2(p^2 + \gamma p)} &= -\frac{\gamma}{p^{q_1}(p^2 + \gamma p)} \\ \bar{S}_f(p)^{q_1} &= -\frac{\gamma}{p^{q_1}(p^2 + \gamma p)} \frac{q_2(p^2 + \gamma p)}{\gamma(1 - q_2) + p} \\ &= -\frac{\gamma q_2}{p^{q_1}(\gamma(1 - q_2) + p)} \\ &= -\frac{\gamma q_2}{p^{q_1}(\gamma - \gamma q_2 + p)} \\ &= \frac{1}{p^{q_1}} \frac{\gamma q_2}{-\gamma + \gamma q_2 - p} \\ &= \frac{1}{p^{q_1}} \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \\ \bar{S}_f(p) &= \frac{1}{p} \left[\frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right] \frac{1}{q_1} \quad (4.42) \end{aligned}$$

Harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$ diperoleh dengan memasukkan tingkat suku bunga (r) = 10%, volatilitas (σ) = 30%, *strike price* (X) = \$100, jangka

waktu berlakunya opsi 1 tahun, dan p variabel Laplace dari metode *Durbin-Crump*.

Untuk mengetahui keakuratan metode dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$, berikut akan ditunjukkan perbandingan hasil perhitungan menggunakan metode *Durbin-Crump* dengan perhitungan analitik pada Tabel 4.2:

Tabel 4.2: Perbandingan Nilai harga *exercise* optimal *American Put Option* dengan $Do = 0$

τ	$S_f(\tau)$ <i>Durbin-Crump</i>	$S_f(\tau)$ Analitik
0.005	0.84831089	0.84830692
0.010	0.81923911	0.81923386
0.015	0.80158451	0.80187124
0.020	0.78899126	0.78790613
0.025	0.77928759	0.77928012
0.030	0.77145711	0.77144913
0.035	0.76493937	0.76493095
0.040	0.75939178	0.75938297
0.045	0.75458941	0.75458026

Berdasarkan Tabel 4.2 terlihat bahwa hasil perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$ menggunakan metode *Durbin-Crump* dengan parameter $N = 200000$ memberikan hasil yang cukup akurat.

4.4 Performansi Metode *Durbin-Crump* dalam Perhitungan Harga *Exercise* Optimal *American Put Option*

Performansi metode *Durbin-Crump* dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dapat dilihat dari segi keakuratan dan kecepatan komputasi metode.

Keakuratan metode *Durbin-Crump* dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* baik dengan dividen maupun dengan $Do = 0$ telah dibahas pada sub bab sebelumnya. Oleh karena itu, pada sub bab ini akan dibahas mengenai performansi *Durbin-Crump* dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dari segi kecepatan komputasi.

Lama waktu yang dibutuhkan suatu metode untuk melakukan perhitungan dapat menjadi pertimbangan dalam menentukan efisiensi metode tersebut. Pada Tabel 4.3 berikut akan ditunjukkan kecepatan komputasi metode *Durbin-Crump* dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$ pada komputer dengan processor Intel Core i3 dan RAM 4gb menggunakan software MATLAB R2010a:

Tabel 4.3: Perbandingan Performansi metode *Durbin-Crump* dengan metode *Gaver Stehfest* dalam Perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* dengan $Do = 0$

τ	$S_f(\tau)$ <i>Crump</i> (\$)	Waktu (s)	$S_f(\tau)$ <i>Stehfest</i> (\$)	Waktu (s)
0.005	84.83	1.277705	84.83	0.014450
0.010	81.92	1.281222	81.92	0.014052
0.015	80.16	1.462900	80.16	0.014524
0.020	78.90	1.331655	78.90	0.015362
0.025	77.93	1.324478	77.93	0.014515
0.030	77.14	1.304399	77.14	0.014565
0.035	76.49	1.327839	76.49	0.014209
0.040	75.94	1.332311	75.94	0.014264
0.045	75.46	1.357526	75.46	0.017317

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$, metode *Durbin-Crump* membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama dibandingkan dengan metode *Gaver Sthefest*. Namun, dengan kecepatan komputasi tersebut metode *Durbin-Crump* masih tergolong efisien dalam menghitung harga *exercise* optimal *American put option* dengan $Do = 0$.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan dari tugas akhir ini yaitu penerapan metode *Durbin-Crump* dalam menghitung *American put option* dengan dividen memberikan hasil yang kurang akurat karena dalam proses perhitungannya dibutuhkan untuk mencari akar dari persamaan yang memuat bilangan imajiner. Namun, untuk fungsi yang lebih sederhana yaitu dengan membuat dividen bernilai nol, metode *Durbin-Crump* memberikan hasil perhitungan opsi dengan tingkat akurasi yang baik. Selain itu, waktu komputasi yang dibutuhkan cukup singkat. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode *Durbin-Crump* merupakan metode yang efisien dalam menghitung *American put option* dengan dividen bernilai nol.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, metode *Durbin-Crump* diterapkan pada perhitungan opsi tipe Amerika dengan mekanisme opsi yaitu *put option* atau opsi jual. Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan perhitungan nilai opsi dengan menggunakan mekanisme opsi yang lain, yaitu *call option* atau opsi beli.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Davies, B. and Martin, B. (1979). *Numerical Inversion of the Laplace Transform*. Journal of Computational Physics Vol 33 No 1.
- [2] Cheng, A. and Sidauruk, P. (1994). *Approximate Inversion of the Laplace Transform*. The Mathematica Journal. Miller Freeman Publication.
- [3] Sasongko, S. R. (2015). **Penentuan Hedge Ratio Harga Emas Dunia Menggunakan Opsi Tipe Eropa**. (Skripsi). Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- [4] Hull, J. C. (2002). **Option Futures and Other Derivatives. Seventh Edition**. Prentice Hall, New Jersey.
- [5] Zhang, J. (2007). **Some Innovative Numerical Approaches for Pricing American Options**. (Thesis). Australia: School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong.
- [6] Chiang, L. (1989). **The Application of Numerical Laplace Inversion Methods to Groundwater Flow and Solute Transport Problems**. (Thesis). Socorro: New Mexico Institute of Mining and Technology.
- [7] Honig, G. (1984). A Method for the Numerical Inversion of Laplace Transforms. Journal of Computational and Applied Mathematics 10, 113-132. North-Holland.

- [8] Anggarini, L. D. (2016). **Perhitungan Nilai Stock Loan dengan Dividen yang Dikumpulkan oleh Lender Sebelum Pengembalian Menggunakan Pendekatan Numerik.** (Tugas Akhir). Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [9] Durbin, F. (1973). Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. Commissariat a l'Energie Atomique Centre U, Service Electronique, B.P. 61. Montrouge-France.

LAMPIRAN A
Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi
 $f(t) = 1$

N	Rata ER	N	Rata ER	N	Rata ER
10	39.04050219	10^3	0.004661317	10^5	4.77E-07
20	24.95124091	2×10^3	0.002913622	2×10^5	3.02E-07
30	18.28950605	3×10^3	0.002115176	3×10^5	2.22E-07
40	14.42427721	4×10^3	0.001659272	4×10^5	1.76E-07
50	11.90401222	5×10^3	0.001364741	5×10^5	1.47E-07
60	10.13193258	6×10^3	0.001158884	6×10^5	1.26E-07
70	8.818374633	7×10^3	0.001006932	7×10^5	1.11E-07
80	7.805952711	8×10^3	0.000890179	8×10^5	9.91E-08
90	7.001852872	9×10^3	0.000797671	9×10^5	8.98E-08
100	6.347821891	10^4	0.000722571	10^6	8.23E-08

LAMPIRAN B
Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi
 $f(t) = e^{at}$

N	Rata ER	N	Rata ER	N	Rata ER
10	39.04050219	10^3	0.004661317	10^5	4.77E-07
20	24.95124091	2×10^3	0.002913622	2×10^5	3.02E-07
30	18.28950605	3×10^3	0.002115176	3×10^5	2.22E-07
40	14.42427721	4×10^3	0.001659272	4×10^5	1.76E-07
50	11.90401222	5×10^3	0.001364741	5×10^5	1.47E-07
60	10.13193258	6×10^3	0.001158884	6×10^5	1.26E-07
70	8.818374633	7×10^3	0.001006932	7×10^5	1.11E-07
80	7.805952711	8×10^3	0.000890179	8×10^5	9.91E-08
90	7.001852872	9×10^3	0.000797671	9×10^5	8.98E-08
100	6.347821891	10^4	0.000722571	10^6	8.23E-08

LAMPIRAN C
Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi
 $f(t) = t^n$

N	Rata ER	N	Rata ER	N	Rata ER
10	0.010121945	10^3	2.70E-07	10^5	2.70E-07
20	0.001405394	2×10^3	2.70E-07	2×10^5	2.70E-07
30	00.000323545	3×10^3	2.70E-07	3×10^5	2.70E-07
40	0.000108697	4×10^3	2.70E-07	4×10^5	2.70E-07
50	4.60E-05	5×10^3	2.70E-07	5×10^5	2.70E-07
60	2.27E-05	6×10^3	2.70E-07	6×10^5	2.70E-07
70	1.25E-05	7×10^3	2.70E-07	7×10^5	2.70E-07
80	7.50E-06	8×10^3	2.70E-07	8×10^5	2.70E-07
90	4.81E-06	9×10^3	2.70E-07	9×10^5	2.70E-07
100	3.26E-06	10^4	2.70E-07	10^6	2.70E-07

LAMPIRAN D
Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi
 $f(t) = \sin(at)$

N	Rata ER	N	Rata ER	N	Rata ER
10	3.746223235	10^3	0.000521694	10^5	2.90E-08
20	1.167251932	2×10^3	0.000130474	2×10^5	1.02E-08
30	0.54568508	3×10^3	5.80E-05	3×10^5	1.74E-08
40	0.313301845	4×10^3	3.26E-05	4×10^5	2.00E-08
50	0.202669231	5×10^3	2.09E-05	5×10^5	2.11E-08
60	0.141653212	6×10^3	1.45E-05	6×10^5	2.18E-08
70	0.104517006	7×10^3	1.06E-05	7×10^5	2.22E-08
80	0.080262506	8×10^3	8.14E-06	8×10^5	2.24E-08
90	0.063559139	9×10^3	6.42E-06	9×10^5	2.26E-08
100	0.051571375	10^4	5.20E-06	10^6	2.27E-08

LAMPIRAN E
Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif pada Fungsi
 $f(t) = \cos(at)$

N	Rata ER	N	Rata ER	N	Rata ER
10	60.83388401	10^3	0.007250633	10^5	7.14E-07
20	16.90467088	2×10^3	0.001813568	2×10^5	1.69E-07
30	7.726539861	3×10^3	0.000806159	3×10^5	6.86E-08
40	4.400477941	4×10^3	0.000453497	4×10^5	3.33E-08
50	2.835851565	5×10^3	0.000290248	5×10^5	1.70E-08
60	1.977991526	6×10^3	0.000201564	6×10^5	8.16E-09
70	1.457609487	7×10^3	0.000148088	7×10^5	3.20E-09
80	1.118440376	8×10^3	0.000113379	8×10^5	3.51E-09
90	0.885186436	9×10^3	8.96E-05	9×10^5	4.40E-09
100	0.717944788	10^4	7.26E-05	10^6	5.56E-09

LAMPIRAN F
Listing Program Matlab metode *Durbin-Crump*
pada Fungsi Sederhana $f(t) = 1$

```
clc;
clear all;

ind=0;
indeks = 0;
for N=100000:100000:1000000
    indeks=indeks+1;

    for t=0.6:0.1:1
        ft = 1;
        T = t;
        E = 10^(-8);
        alpha = 0;
        v = alpha-(log(E)/(2*T));
        ind = ind + 1;

        b=0;
        for k = 0:N
            x = 1i*k*pi/T;
            F = 1/(v+x);
            c = cos(k*pi*t/T);
            s = sin(k*pi*t/T);
            p = real (F*c);
            q = imag (F*s);
            y = p-q;
            b = b+y;
        end
    end
end
```

LAMPIRAN F (LANJUTAN)

```

z = -1/2*1/v;
h = (exp(v*t)/T)*(z+b)

EA(ind)=abs(h-ft);
ER(ind)=abs((h-ft)/ft);

-      end

EATot=0;
ERTot=0;
]      for i=1:ind
        EATot=EATot+EA(i);
        ERTot=ERTot+ER(i);
-      end

AverageEA(indeks)=EATot/ind;
AverageER(indeks)=ERTot/ind;
- end

```

LAMPIRAN G

Listing Program MATLAB Metode
Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = e^{at}$

```

clc;
clear all;

ind = 0;
indeks = 0;
for N=100000:100000:1000000
    indeks = indeks + 1;

    for t=0.6:0.1:1
        T = t;
        a = 4;
        ft = exp(a*t);
        alpha = a;
        E = 10^(-8);
        v = alpha-(log(E)/(2*T));
        ind=ind+1;

        b = 0;
        for k=0:N
            x = 1i*k*pi/T;
            F = 1/((v+x)-a);
            c = cos(k*pi*t/T);
            s = sin(k*pi*t/T);
            p = real (F*c);
            q = imag (F*s);
            y = p-q;
            b = b+y;
        end
    end
end

```

LAMPIRAN G (LANJUTAN)

```

z = -1/2*(1/(v-a));
h = exp(v*t)/T*(z+b)

EA(ind)=abs(h-ft);
ER(ind)=abs((h-ft)/ft);
- end

EATot=0;
ERTot=0;
] for i=1:ind
    EATot=EATot+EA(i);
    ERTot=ERTot+ER(i);
- end

AverageEA(indeks)=EATot/ind;
AverageER(indeks)=ERTot/ind;
- end

```


LAMPIRAN H

Listing Program MATLAB Metode
Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana $f(t) = t^n$

```

clc;
clear all;

indeks = 0;
for N=100000:100000:1000000
    indeks = indeks + 1;
    ind = 0;

    for t=0.6:0.1:1
        n = 3;
        alpha = 0;
        ft = t^n;
        T = t;
        E = 10^(-8);
        v = alpha-(log(E)/(2*T));
        ind = ind + 1;

        b=0;
        for k = 0:N
            x = 1i*pi*k/T;
            F = factorial(n)/((v+x)^(n+1));
            c = cos(k*pi*t/T);
            s = sin(k*pi*t/T);
            p = real (F*c);
            q = imag (F*s);
            y = p-q;
            b = b+y;
        end
    end
end

```

LAMPIRAN H (LANJUTAN)

```

z = -1/2*factorial(n)/((v)^(n+1));
h = exp(v*t)/T*(z+b)

EA(ind)=abs(h-ft);
ER(ind)=abs((h-ft)/ft);

end

EATot=0;
ERTot=0;
] for i=1:ind
    EATot=EATot+EA(i);
    ERTot=ERTot+ER(i);
end

AverageEA(indeks)=EATot/ind;
AverageER(indeks)=ERTot/ind;
end

```

LAMPIRAN I
Listing Program MATLAB Metode
Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana
 $f(t) = \sin(at)$

```

clc;
clear all;

indeks = 0;
for N=10:10:100
    indeks = indeks + 1;
    ind = 0;

    for t=0.6:0.1:1
        a = (1/6)*pi;
        alpha = 0;
        ft = sin(a*t);
        T = t;
        E = 10^(-8);
        v = alpha-(log(E)/(2*T));
        ind = ind + 1;

        b=0;
        for k = 0:N
            x = 1i*pi*k/T;
            F = a/((v+x)^2+a^2);
            c = cos(k*pi*t/T);
            s = sin(k*pi*t/T);
            p = real (F*c);
            q = imag (F*s);
            y = p-q;
            b = b+y;
        end
    end
end

```

LAMPIRAN I (LANJUTAN)

```

z = -1/2*(a/(v^2+a^2));
h = exp(v*t)/T*(z+b)

EA(ind)=abs(h-ft);
ER(ind)=abs((h-ft)/ft);

end

EATot=0;
ERTot=0;
for i=1:ind
    EATot=EATot+EA(i);
    ERTot=ERTot+ER(i);
end

AverageEA(indeks)=EATot/ind;
AverageER(indeks)=ERTot/ind;

end

```

LAMPIRAN J
Listing Program MATLAB Metode
Durbin-Crump pada Fungsi Sederhana

$$f(t) = \cos(at)$$

```

clc;
clear all;

indeks = 0;
for N=1000:1000:10000
    indeks = indeks + 1;
    ind = 0;

    for t=0.6:0.1:1
        a = (1/3)*pi;
        alpha = 0;
        ft = cos(a*t);
        T = t;
        E = 10^(-8);
        v = alpha-(log(E)/(2*T));
        ind = ind + 1;

        b=0;
        for k = 0:N
            x = 1i*pi*k/T;
            F = (v+x)/((v+x)^2+a^2);
            c = cos(k*pi*t/T);
            s = sin(k*pi*t/T);
            p = real (F*c);
            q = imag (F*s);
            y = p-q;
            b = b+y;
        end
    end
end

```

LAMPIRAN J (LANJUTAN)

```

z = -1/2*(a/(v^2+a^2));
h = exp(v*t)/T*(z+b)

EA(ind)=abs(h-ft);
ER(ind)=abs((h-ft)/ft);

end

EATot=0;
ERTot=0;
for i=1:ind
    EATot=EATot+EA(i);
    ERTot=ERTot+ER(i);
end

AverageEA(indeks)=EATot/ind;
AverageER(indeks)=ERTot/ind;

end

```

LAMPIRAN K
Listing Program MATLAB Perhitungan
American Put Option dengan Dividen
Menggunakan Metode *Durbin-Crump*

```

clc;
clear all;

r = 0.05;
Do = 0.05;
vol = 0.3;
E = 10^(-8);
T = 0.006116;

D = 2*Do/(vol^2);
g = 2*r/(vol^2);
b = 1/2*(1+D-g);
p = -g - (log(E)/(2*T));

q1 = b + sqrt((b^2)+(p+g));
q2 = b - sqrt((b^2)+(p+g));

akarsf = fzero (@(f) f^q1*((g+p+(D-g)*q2)/
(q2*(p+g)*(p+D)))+(f*D*((1-q2)/((p^q1)*q2*(p+D))))
+(g/(p^(1+q1)*(p+g))), [0 1000]);
akarsf

```

LAMPIRAN K (LANJUTAN)

```

indeks = 0;
for N=1000000
    indeks = indeks + 1;

    t = T;
    a = 0;
    for k=0:N
        x = li*k*pi/T;
        c = cos(k*pi*t/T);
        s = sin(k*pi*t/T);
        Re = real (akarsf*c);
        Im = imag (akarsf*s);
        y = Re-Im;
        a = a+y;
    end
    z = -1/2*akarsf;
    durbin = exp(p*t)/T*(z+a);

    sf(indeks) = durbin
end

```


LAMPIRAN L
Listing Program MATLAB Perhitungan
American Put Option dengan Dividen Bernilai
Nol Menggunakan Metode *Durbin-Crump*

```
clc;
clear all;

r = 0.1;
vol = 0.3;
E = 10^(-8);
T = 0.045;

g = 2*r/(vol^2);
b = (1-g)/2;
p = -g-(log(E)/(2*T));

tic

indeks = 0;
for N=200000
    indeks = indeks + 1;

    t = T;
    a = 0;
    for k=0:N
        x = 1i*k*pi/T;
```

LAMPIRAN L (LANJUTAN)

```

q11 = b + sqrt((b^2)+(p+x)+g));
q22 = b - sqrt((b^2)+(p+x)+g));

F = 1/(p+x)*(((g*q22)/((g*q22)-((p+x)+g)))^(1/q11));
c = cos(k*pi*t/T);
s = sin(k*pi*t/T);
Re = real (F*c);
Im = imag (F*s);
y = Re-Im;
a = a+y;
end

q1 = b + sqrt((b^2)+(p+g));
q2 = b - sqrt((b^2)+(p+g));

z = -1/2*1/p*(((g*q2)/((g*q2)-(p+g)))^(1/q1));
durbin = exp(p*t)/T*(z+a);

sf(indeks) = durbin
end

toc

```

LAMPIRAN M

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Ayu Risanti Yuniar, lahir di Malang, pada 25 Januari 1995. Terlahir sebagai anak kedua dari 3 bersaudara dari pasangan Haris Sunardi dan Tri Ernawati. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Muslimat NU 25 Malang (1999-2001), SD Negeri Lesanpuro IV Malang (2001-2007), SMP Negeri 5 Malang (2007-2010), dan SMA Negeri 4 Malang (2010-2013). Kemudian pada tahun 2013, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya melalui jalur SNMPTN dengan NRP 1213 100 038. Penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan yang terdiri dari bidang minat Pemodelan dan Riset Operasi dan Pengolahan Data. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis aktif di beberapa organisasi. Pada tahun 2014-2015 penulis menjadi staf Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (PSDM) Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) ITS dan staf Departemen Kaderisasi Lembaga Dakwah Jurusan Matematika. Pada tahun 2015-2016 penulis menjadi Kepala Biro Kaderisasi Departemen Student Research Development HIMATIK ITS dan Sekretaris Departemen Big Event Lembaga Dakwah Jurusan Matematika. Penulis

juga aktif di kepanitiaan seperti Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 2015 dan OMITS 2016, sebagai Sie Kestari.

Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email ayu.risanti25@gmail.com